

模糊集框架下的基数模糊量词研究*

高东平¹, 郭佳宏², 黎永锦³

- (1. 北京理工大学计算机科学技术学院, 北京 100081;
2. 北京师范大学哲学与社会学院, 北京 100875;
3. 中山大学逻辑与认知研究所, 广东 广州 510275)

摘要: 基数模糊量词在日常的交流和推理中有着广泛的应用。将基数模糊量词的语义分析扩展到模糊集, 在模糊集的框架下给出了基数模糊量词语义的形式刻画, 并证明了其相应的性质。

关键词: 模糊量词; 基数模糊量词; 模糊集

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2008) 03-0023-04

1 基数模糊量词

按照广义量词理论, 基数量词是指这样的函项 Q , 对主目的任何取值 A, B 来说 $Q(A)(B)$ 仅仅依赖于 $A \cap B$ 的基数, 严格定义如下:

给定论域 E , E 上的函项 Q 是基数的, 当且仅当, $\forall A, A', B, B' \subseteq E, |A \cap B| = |A' \cap B'| \Rightarrow Q(A)(B) = Q(A')(B')$ 。

在自然语言中, 基数量词包括“大约 n ”, “至少(最多) n ”等等。由于“大约”, “至少”这些词在模糊数学中称为模糊操作数, 因此我们也把基数量词称为基数模糊量词(在这里基数模糊量词主要指广义量词理论中的 $<1, 1>$ 类型的基数量词)。根据其是否具有精确语义上(下)限, 基数模糊量词可以进一步进行细分^[1]。我们将语义上(下)限定义如下:

定义 1 对任意的 $A \subseteq U$, 如果对任意的 $B \subseteq U, |A| \leq |B|$, 使得: 如果“ $|B| S$ (不)是 P 为”真, 则“ $[M] S$ (不)是 P ”为真, 则称 $|A|$ 为模糊量词 M 相对论域 U 的语义下限。

定义 2 对任意的 $A \subseteq U$, 如果对任意的 $B \subseteq U, |B| \leq |A|$, 使得: 如果“ $|B| S$ (不)是 P ”为真, 则“ $[M] S$ (不)是 P ”为真, 则称 $|A|$ 为模糊量词 M 相对论域 U 的语义上限。

2 模糊集框架下基数模糊量词的语义刻画

对于带基数模糊量词的陈述 $Q(A)(B)$, A, B

的性质直接影响着其真值的计算。如:

- a. 至少十个学生是高个子
- b. 至少十个学生戴眼镜

a 和 b 的真值计算显然不同。因为, 我们可以清楚地知道论域中戴眼镜的学生的数量, 而由于“高个子”是模糊集, 却很难判断论域中高个子的数目(在论域结构不受限制的情况下)。对于 a 类型的陈述, 应用模糊集的工具来讨论其真值条件。

定义 3^[2] $E \neq \emptyset$ 上的 n 元模糊量词表示为映射 $Q: \mathcal{P}(E)^n \rightarrow I$ 。

其中, $(\mathcal{P}(E)^n \rightarrow I)$ 表示 E 的模糊幂集。因此, 模糊量词映射 E 上的任意 n 元模糊论元集 $(X_1, \dots, X_n)$ 到相应的隶属度 $Q(X_1, \dots, X_n) \in I$ 。

讨论带模糊量词的陈述(包括论元是模糊集的情况)的真值, 必然要涉及到模糊集基数的计算。很多学者基于不同的动机, 都给出了各自认为合理的模糊集基数的计算方法^[3-9], 但不少方法都有一定的缺点, 甚至存在有悖于直观的反例^[10]。

在本文中, 我们采用普遍接受的一种方法: 把模糊集的基数视为恰好有 k 个元素的可能性。则 $\text{Card}_{A \cap B}(k)$ 解释为 $A \cap B$ 恰好有 k ($0 \leq k \leq n$) 个元素的可能性。类似于文 [11], 有

定理 1 $A \cap B$ 的模糊基数为: $\text{Card}_{A \cap B}(k) = \mu_k \wedge (1 - \mu_{(k+1)})$ $k = 0, 1, \dots, n$

其中 μ_k 是 $\mu_{A \cap B}(x_k)$ 按递减顺序排列的值, 且 $\mu_0 = 1, \mu_{(n+1)} = 0$

类似于文 [12], 我们也可以给出 $\text{Card}_{A \cap B}(k)$ 的简单表达:

* 收稿日期: 2007-11-19

基金项目: 教育部人文社会科学研究青年基金资助项目 (07JC720401)

作者简介: 高东平 (1979 年生), 男, 博士后; 通讯联系人: 黎永锦 E-mail: stsljy@mail.sysu.edu.cn

$$\text{Card}_{A \cap B}(k) = \begin{cases} 1 - \mu_{(k+1)} & 0 \leq k \leq j-1 \\ \mu_k & j \leq k \leq n \end{cases}$$

其中

$$j = \begin{cases} \max \{1 \leq s \leq n \mid \mu_{(s-1)} + \mu_s \geq 1\} & \text{若 } A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{若 } A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

称 j 为 $A \cap B$ 的模糊基数。我们根据集合 $A \cap B$ 的模糊基数, 来给出带基数模糊量词陈述的真值刻画。用 $\bar{T}$ 表示“模糊真”, $\bar{F}$ 表示“模糊假”。且 j 的定义如上, 则:

$$(\text{至少 } n)(A)(B) = \begin{cases} \bar{T} & \text{如果 } n < k \\ \mu_{A \cap B}(n) & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{其中, } k = \begin{cases} j-1 & \text{如果 } \mu_j \leq 0.5 \\ j & \text{否则} \end{cases}$$

$$(\text{最多 } n)(A)(B) = \begin{cases} \bar{T} & \text{如果 } n \geq k \\ \mu_{A \cap B}(n) & \text{否则} \end{cases}$$

$$\text{其中, } k = \begin{cases} j-1 & \text{如果 } \mu_j < 0.5 \\ j & \text{否则} \end{cases}$$

$$(\text{几个})(A)(B) = \begin{cases} \bar{T} & \text{如果 } \mu_j \geq 0.5 \text{ 且 } 3 \leq j \leq 9, \\ & \text{或者 } \mu_j \leq 0.5 \text{ 且 } 3 \leq j-1 \leq 9 \\ \bar{F} & \text{否则} \end{cases}$$

上述几个基数模糊量词的真值刻画分别代表了具有语义下限, 具有语义上限, 和既具有语义上限又具有语义下限的基数模糊量词的真值刻画。

例如: 令论域为 E , $A = \{x \mid x \in \text{学生}\}$, B 为模糊集“高个子”, $\mu_B(x) = \alpha$, 若论域中有 6 个学生, 则按递减顺序排列如下(因为论域为有限集, 故总可以做出如下排序):

$$B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ 0.9 & 0.8 & 0.7 & 0.5 & 0.3 & 0.1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Card}_{A \cap B}(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$$

针对这种情况, 可以计算出“至少 2 个学生是高个子”的真值为 $\bar{T}$ (因为 $2 < 3$, 此时 $k=3$, $j=4$), “最多 2 个学生是高个子”的真值为 0.3, “最多 4 个学生是高个子”的真值为 $\bar{T}$, “几个学生是高个子”的真值为 $\bar{T}$ 。由此看出, 根据基数模糊量词的真值条件计算所得的真值与直观相当符合。

3 基数模糊量词的性质

根据模糊集框架下基数模糊量词的语义刻画, 我们进一步讨论其具有的性质。

3.1 单调性

单调性的研究是基数模糊量词性质研究的一个重要方面, 其显示的是由各种量词生成的不同子集

的语义特征和推理类型。

把 Q 的论元扩展到模糊集, 类似于文 [2], 可以给出扩展到模糊集后单调性的定义:

定义 4 称 $Q: \mathcal{P}(E)^n \rightarrow I$ 在第 i 个论元上是单调增的($i \in \{1, \dots, n\}$, $n > 0$) 当且仅当对所有 $X_1, \dots, X_n, X'_i \in \mathcal{P}(E)$ 使得 $X_i \subseteq X'_i, Q(X_1, \dots, X_n) \leq Q(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$; 称 Q 在第 i 个论元上是单调减的($i \in \{1, \dots, n\}$, $n > 0$) 当且仅当对所有 $X_1, \dots, X_n, X'_i \in \mathcal{P}(E)$ 使得 $X_i \subseteq X'_i, Q(X_1, \dots, X_n) \geq Q(X_1, \dots, X_{i-1}, X'_i, X_{i+1}, \dots, X_n)$ 。

命题 1 令 $Q(A)(B)$ 为带基数模糊量词 Q 的陈述, 若 Q 具有语义下限, 肯定句式的情况下, Q 在其第一个论元和第二个论元上都是单调增, 否定句式时, Q 在第一个论元上单调增, 第二个论元上单调减。若 Q 具有语义上限, 则肯定句式时, Q 在其两个论元上都是单调减, 否定句式时, Q 在第一个论元上是单调减, 第二个论元上单调增。

证明 我们仅对“若 Q 具有语义下限, 则 Q 在 B 上是肯定单调增”给出证明, 其他情况证明类似。

即需证明当 $B_1 \subseteq B_2$ 时, $Q(A)(B_1) \leq Q(A)(B_2)$ 。

若 $B_1 \subseteq B_2$, 则对 $\forall x \in B_1, B_2, \mu_{B_1}(x) \leq \mu_{B_2}(x)$ 。由上文分析知:

$$\text{Card}_{A \cap B_1}(k_1) = \begin{cases} 1 - \mu_{(k_1+1)} & 0 \leq k_1 \leq j_1 - 1 \\ \mu_{k_1} & j_1 \leq k_1 \leq n \end{cases}$$

$$\text{Card}_{A \cap B_2}(k_2) = \begin{cases} 1 - \mu_{(k_2+1)} & 0 \leq k_2 \leq j_2 - 1 \\ \mu_{k_2} & j_2 \leq k_2 \leq n \end{cases}$$

j_1, j_2 的取值分别为:

$$j_1 = \begin{cases} \max \{1 \leq s_1 \leq n \mid \mu_{(s_1-1)} + \mu_{s_1} \geq 1\} & \text{若 } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{如果 } A = \emptyset \end{cases}$$

$$j_2 = \begin{cases} \max \{1 \leq s_2 \leq n \mid \mu_{(s_2-1)} + \mu_{s_2} \geq 1\} & \text{若 } A \neq \emptyset \\ 0 & \text{如果 } A = \emptyset \end{cases}$$

因为 $\mu_{B_1}(x) \leq \mu_{B_2}(x)$, 所以 $\mu_{A \cap B_1}(x) \leq \mu_{A \cap B_2}(x)$ 。不论 x_i 在 $A \cap B_1$ 和 $A \cap B_2$ 中的排序位置是否相同, 都有 $\mu(k_1) \leq \mu(k_2)$, 因此 $j_1 \leq j_2$, 则由 $Q(A)(B)$ 的真值条件知:

当 $T(Q(A)(B_1)) = \bar{T}$ 时, $T(Q(A)(B_2)) = \bar{T}$;

当 $T(Q(A)(B_1)) = \mu(k_1)$ 时, $T(Q(A)(B_2)) = \bar{T}(k_2)$, 而 $\mu(k_1) \leq \mu(k_2)$, 因此, $Q(A)(B_1) \leq Q(A)(B_2)$ 证毕。

3.2 基数模糊量词的“交”、“并”性质

定义 5 称 Q 具有“左并”性质, 如果 $Q(A \cup B)(C) \Rightarrow Q(A)(C) \vee Q(B)(C)$;

称 Q 具有“右并”性质, 如果 $Q(A)(C) \vee$

$Q(B)(C) \Rightarrow Q(A \cup B)(C)$;

称 Q 具有“左交”性质, 如果 $Q(A \cap B)(C) \Rightarrow Q(A)(C) \wedge Q(B)(C)$;

称 Q 具有“右交”性质, 如果 $Q(A)(C) \wedge Q(B)(C) \Rightarrow Q(A \cap B)(C)$;

我们在模糊集的框架下, 以“至少 n ”为例, 表明其具有“左交”性质。

即表明“(至少 n)($A \cap B$)(C) $\Rightarrow$ (至少 n)(A)(C) 并且 (至少 n)(B)(C)”。

由上文的语义分析, 我们知道, $\text{Card}_{A \cap B \cap C}(k) = \mu_k \wedge (1 - \mu_{(k+1)}) \quad k = 0, 1, \dots, n; \text{Card}_{A \cap B}(k) = \mu'_k \wedge (1 - \mu'_{(k+1)}); \text{Card}_{A \cap C}(k) = \mu''_k \wedge (1 - \mu''_{(k+1)})$ 。若 x_i 在 $A \cap B \cap C$ 和 $A \cap B$ 中的隶属度排序相同, 则由于 $\mu_{A \cap B \cap C}(x_i) \leq \mu_{A \cap B}(x_i)$ (即 $\mu_k \leq \mu'_k$), 且 $\text{Card}_{A \cap B \cap C}(k - i) = 1 - \mu_{(k-i+1)}$ (其中 $i = 1, 2, \dots, k, k = j - 1$ 如果 $\mu_j \leq 0.5$ 否则 $k = j, j$ 的取值同定理 1), 所以 $\text{Card}_{A \cap B \cap C}(k - i) \leq \text{Card}_{A \cap B}(k - i)$, 由此可知, 对于 $\text{Card}_{A \cap B \cap C}(k)$ 的计算中的 j 取值一定是小于等于 $\text{Card}_{A \cap B}(k)$ 中的 j' 取值的。因此, 由“至少 n ”的语义分析知, 当“(至少 n)($A \cap B$)(C)”为 $\bar{T}$ 时,“(至少 n)(A)(C)”为 $\bar{T}$ 。若 x_i 在 $A \cap B \cap C$ 和 $A \cap B$ 中的隶属度排序不同, 则 x_i 对于 $A \cap B$ 从大到小重新排序后, 第 i 个元素的隶属度一定是大于等于 $A \cap B \cap C$ 排好序的第 i 个元素的隶属度, 因此, $\text{Card}_{A \cap B \cap C}(k)$ 的计算中的 j 取值也一定是小于等于 $\text{Card}_{A \cap B}(k)$ 中的 j' 取值的。因此, 当“(至少 n)($A \cap B$)(C)”为 $\bar{T}$ 时,“(至少 n)(A)(C)”为 $\bar{T}$ 。

更进一步的, 可以计算出, 当“(至少 n)($A \cap B$)(C)”的真值为 $\mu_{A \cap B \cap C}(n)$ 时, 也一定是小于等于“(至少 n)(A)(C)”的真值。

同样方法, 可以得到“(至少 n)($A \cap B$)(C)”的真值小于等于“(至少 n)(B)(C)”的真值, 因此, 我们可以得到“(至少 n)($A \cap B$)(C)” $\Rightarrow$ “(至少 n)(A)(C) $\wedge$ (至少 n)(B)(C)”。

因此, 可以总结出:

命题 2 令 $Q(A)(B)$ 为带基数模糊量词 Q 的陈述, 若 Q 只具有语义下限, 则 Q 具有“左交”, “右并”性质; 若 Q 只具有语义上限, 则 Q 具有“右交”, “左并”性质; 若 Q 不具有语义上限和语义下限, 或既具有语义上限又具有语义下限, 则 Q 不具有交、并性质。

除上述单调性质和交、并性质外, 在模糊集框架下基数模糊量词还具有对称性, 凸集性质, 一阶可定义性等性质, 参见文 [1]。

4 结 论

在模糊集的框架下, 我们给出了基数模糊量词语义的形式刻画, 通过文中分析可见, 计算所得的真值与直观相当符合。在语义分析的基础上, 我们也对基数模糊量词的单调性, 交、并性质进行了讨论。在语义和性质的基础上, 可以进一步讨论其有效的推理模式, 并构造相应的逻辑系统。

参考文献:

- [1] GAO D P. Logic Study on Fuzzy Quantifiers[D]. Doctoral Dissertation of Sun Yat-sen University, 2007.
- [2] GLÖCHNER I. DFS-An Axiomatic Approach to Fuzzy Quantification[R]. Report TR97-06, 1997.
- [3] ZADEH L A. A theory of approximate reasoning[J]. Machine Intell, 1979, 9: 149-194.
- [4] ZADEH L A. A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages[J]. Computers and Mathematics with Applications, 1983, 9: 149-184.
- [5] WYGRALAK M. Fuzzy cardinals based on the generalized equality of fuzzy subsets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, 18: 143-158.
- [6] WYGRALAK M. Questions of cardinality of finite fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 102(6): 85-210.
- [7] YAGER R. On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making[J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 1988, 18(1): 183-190.
- [8] VILA M A, CUBERO J C, MEDINA O P. Using OWA operator in flexible query processing[M]. The ordered weighted averaging operators: theory and applications, Publisher Kluwer Academic Publishers Norwell, MA, USA, 1997: 258-274.
- [9] DÍAZ-HEMIDA F, BUGARIN A, CANRINENA P, BARRO S. Voting-model based evaluation of fuzzy quantified sentences: a general framework[J]. Fuzzy sets and Systems, 2004, 146: 97-120.
- [10] DELGADO M, SANCHEZ D, VILA MA. Fuzzy cardinality based evaluation of quantified sentences[J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2000, 23: 23-66.
- [11] RALESCU A L. A note on rule representation in expert systems[J]. Inform Sci, 1986, 38: 93-203.
- [12] RALESCU D. Cardinality, quantifiers, and the aggregation of fuzzy criteria[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1995, 69: 355-365.

(下转第 36 页)

- Data Acquisition & Processing, 1993, 8(3): 177 - 184.
- [7] 伍文城, 肖建. 基于蚁群算法的中国旅行商问题满意解[J]. 计算机与现代化, 2002(8): 6 - 11.
WU Wencheng, XIAO Jian. Satisfactory solution of chinese travelling salesman problem based on ant colony algorithm[J]. Computer and Modernization, 2002(8): 6 - 11.
- [8] 韩建枫, 李敏强, 寇纪淞. 一种求解 TSP 问题的新型遗传编码及应用[J]. 天津大学学报, 2003, 36(2): 225 - 229.
HAN Jianfeng, LI Minqiang, KOU Jisong. New GA encoding scheme and application for solving TSP[J]. Journal of Tianjin University, 2003, 36(2): 225 - 229.
- [9] 燕忠, 袁春伟. 用蚁群优化算法求解中国旅行商问题[J]. 电路与系统学报, 2004, 9(3): 122 - 126.
YAN Zhong, YUAN Chunwei. Applying ant colony optimizations to chinese traveling salesman problem[J]. Journal of Circuits and Systems, 2004, 9(3): 122 - 126.
- [10] 于喜洋, 王小平. 免疫遗传算法在 TSP 求解中的应用[J]. 计算机应用与软件, 2006, 23(5): 21 - 23.
YU Xiyang, Wang Xiaoping. Application of immune genetic algorithm to TSP [J]. Computer Applications and Software, 2006, 23(5): 21 - 23.

On Ant Colony Hybrid Differential Evolution for Optimization Problems

LUO Zhong-liang¹, YU Ming-zhu², LIU Xiao-yong³

- (1. Automation Department, Foshan University, Foshan 528000, China;
2. Lingnan College, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
3. Automation Department, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An ant colony hybrid differential evolution algorithm is developed to overcome the problem of premature convergence and shorten the convergence time of differential evolution algorithm. In this algorithm, the ant colony can provide the proper mutation operator in hybrid differential evolution, then it can accelerate the search of global solution. The optimization simulation results for china traveling salesman Problem (CTSP) show that the proposed method is efficient for solving global optimization problems.

Key words: ant colony hybrid differential evolution; optimization; CTSP

(上接第 25 页)

Study on Cardinal Fuzzy Quantifiers in Fuzzy Set Frame

GAO Dong-ping¹, GUO Jia-hong², LI Yong-jin³

- (1. School of Computer sciences and technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;
2. School of Philosophy and Sociology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;
3. The Institute of Logic and Cognition, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Cardinal fuzzy quantifiers are applied broadly in daily communications and reasoning. In this paper, the semantic analysis of cardinal fuzzy quantifiers was extended to fuzzy set. A formal semantics of cardinal fuzzy quantifiers in fuzzy set frame was provided and their properties were discussed.

Key words: fuzzy quantifiers; cardinal fuzzy quantifiers; fuzzy set